

Solutions

ACM/ICPC 2016 China-Final



Practice Round

A. Beautiful Numbers

枚举转成B进制以后的位数, 显然, 位数最多只有60位(二进制)

对于每一个位数i, 可以二分进制, 注意long long的越界处理。

B. Watson and Intervals

把每一个区间拆成开始位置和结束位置，把所有位置排序以后依次扫描，即可得到覆盖每个小区间的原始区间集合，对于只被一个区间覆盖的进行统计。

最后，取满足条件的最大区间即可。

C. Clash Royale

因为最多一共只有12张牌，每张牌最多10级，所以可以把牌分成2组，每组6张，每组组内暴力枚举，然后合并两组之间的结果。

D. Soldiers

从游戏结束时间开始考虑, 只有两种情况:

- 1、最后一次取的是当时两个维度都最大的那个士兵, 游戏结束。
- 2、如果不存在这样的士兵, 最后一次和倒数第二次分别取的是当时两个维度最大的士兵, 游戏结束。这个情况下, 去掉所有单维度值最大的士兵, 递归做。

复杂度可以做到 $O(n \log n)$, 为了给大家减轻练习赛压力, $O(n^2)$ 的做法就可以过

Final Round

Problem A. Number Theory Problem

$$2^k \% 7 == 1 \Leftrightarrow ((2^k) - 1) \% 7 == 0$$

$$7 == \text{Binary}(111)$$

$$((2^k)-1) == \text{Binary}(111\dots11)$$

显然, 在 $(2^k)-1$ 中 1 的个数需要是 3 的倍数。

所以答案为 $n/3$

Problem B. Hemi Palindrome

首先, 简化成: 已知一个前缀, 问以这个串为前缀, 有多少Hemi Palindrome。分情况讨论:

前缀长度 \leq 一半: 奇位回文 + 偶位回文 - 奇偶同时回文, 回文串的个数就是 $2^{\text{自由位}}$

前缀长度 $>$ 一半: 当时的前缀已经可以得知是否可能是奇位或者偶位回文。然后根据情况, 一样也是统计自由位的个数。

自由位可以通过简单数据结构维护, 总复杂度 $O(n)$

Problem C. Mr. Panda and Strips

考虑枚举左边的区间，用数据结构维护右边区间的长度。

固定左边的区间的左端点，不断向右移动其右端点，同时用数据结构(set)维护所有的极大右区间。

每次移动区间的右端点，将包含与右端点相同颜色的极大右区间调整成至多2个区间即可。

Problem D. Ice Cream Tower

假设 $B(i, j)$ 表示第 i 个ice cream tower中第 j 个ice cream ball。

假设最后一共拼成了 K 个ice cream tower, 那么任意一种方案一定可以调整成如下排列方案:

$B(1, 1), B(2, 1)..B(K, 1), B(1, 2), B(2, 2)..B(K, 2), B(1, 3), B(2, 3)..B(K, 3)..$

由于 $B(i, j)$ 和 $B(i, j - 1)$ 的距离为 $K + 1$, 因此 $B(i, j) \geq 2 * B(i, j - 1)$

最后二分答案, 按照该性质贪心检验答案即可。

Problem E. Bet

对每个队伍，计算回报比， $a:b$ 的回报比是 $a/(a+b)$ 。

然后要铁定赚钱，回报比的和必需 <1 。所以对回报比排序，从小到大取。

由于实数求和以后可能非常接近1，所以直接使用实数是不正确的做法，使用高精度就可以避免这个精度问题。

Problem F. Mr. Panda and Fantastic Beasts

传统简单字符串题(?)。

后缀数组, 二分答案, 分组。

后缀自动机, BFS。

二分答案, Hash。

Problem G. Pandaria

考虑 Kruscal 的过程, 合并两个节点时, 新建一个节点后把原来的节点视作新节点的左右儿子。

这样可以建出一棵树, 每次询问相当于询问这棵树上一个子树颜色的众数。线段树合并/启发式合并即可。

Problem H. Great Cells

A_g 是恰好有 g 个 Great 格子的填数方案, 求 $\text{Sum } (g+1)A_g$ 。

考虑格子 (i, j) 是 Great 对最终答案的贡献:

$$\text{Contrib} = \text{Sum}_{\{k=0\}^{\{K-1\}} k^{(N-1+M-1)} * K^{[(N-1)(M-1)]}$$

$$\text{Ans} = \text{Contrib} * N * M + K^{(N*M)}$$

Problem I. Cherry Pick

N 种面值的货币: a_1, a_2, \dots, a_N ; $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_N) = k$

对于充分大的数, 只要能被 k 整除, 一定可以用这 N 种货币支付。证明: 考虑对某个面值的剩余类做最短路, 这个分界点是 $O(\max(a_i)^2)$ 的。

问题分成两部分:

1、小于分界点的数直接暴力背包

2、大于分界点的数: $(q+px)^n = \sum q^{(n-i)} p^i x^i$, 把 x^i 按照 $i \% k$ 分成 k 类, 每类分别计算。e.g. 计算 $C(n,r)+C(n,k+r)+C(n,2k+r)+C(n,3k+r)\dots$ 。FFT

Problem J. Mr.Panda and TubeMaster

注意到如果将无向环定向, 则对于任意2个连通(在同一个环)且相邻的格子, 它们之中必然有一个格子是从南北连向东西, 另一个是从东西连向南北。

将矩阵黑白染色, 不妨令所有的白格子的方向为东西至南北, 所有的黑格子的方向为南北至东西。同时, 将每个格子拆成南北节点和东西节点, 则矩阵变为有向图, 且任意一个环对应矩阵中的一个环。

使用上下界的技巧处理essential cells, 对原图求最小费用流即可。

Problem K. Justice Rains From Above

考虑以法鸡为球心作单位球，将每个点映射到球面上，以它们为圆心作 N 个球面上的圆，答案为选择球面上一个点，使其在最多的圆中。

只需要考虑任意两个圆的交点被多少个圆覆盖即可，Naive的做法是 $O(N^3)$ 的
对于一个圆，算出上面所有的交点，对它们做极角排序扫描，复杂度 $O(N^2 \log N)$

排序时可以通过两个向量的叉积与法向量是否同向进行比较

也可以将枚举的圆旋转到 $z = 0$ 的平面上，则所有交点都是二维坐标，通过计算向量角进行排序

Problem L. World Cup

简单题

枚举每场比赛的胜负平结果，看每种情况积分是不是和目标积分相同。

最后根据没有相同，一个相同，多个相同，输出不同的结果。

